数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 140-156

長波分散型方程式の孤立波の漸近安定性について

水町　徹 (Tetsu Mizumachi)
横浜市立大学 (Yokohama City University)

1　前文

一昔前まで，孤立波の漸近安定性に関する研究は，完全可積分系の方程式を逆散乱法の立場で研究したもの（[9, 1, 35] 参照）を除けば非線形シュレディンガー方程式の場合には Soffer-Weinstein [36, 37] や Buslaev-Perelman [7] とその結果を multi-pulse の場合に拡張した Perelman [30]，KdV 方程式の場合は，Pego-Weinstein [32, 33] などが主だったものだと思います．最近は研究成果が増えており思いつくものを挙げただけでも Perelman [30] の結果を空間高次元の場合に拡張した Perelman [31] や Rodnianski-Schlag-Soffer の結果などがあります．また近年 Merle を中心としたフランスの研究グループは Liouville 型定理を巧妙に使うことで爆発解の形状の安定性解析に関する結果を次々と出していますが [20, 21, 22, 24, 25, 26]，これらの文献を解説することは，私の手には余るので KdV 方程式と RLW 方程式という二つの長波長方程式の孤立波の漸近安定性に関する１９９０年代前半までの研究結果と，Martel-Merle [17, 19] による孤立波の漸近安定性の研究の RLW 方程式への応用について報告することに致します．

2　序文

KdV 方程式

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{for } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

と RLW 方程式

$$(\mathrm{RLW})\qquad \begin{cases} (1-\partial_x^2)u_t + (u + \frac{1}{2}u^2)_x = 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \text{ and } t \in \mathbb{R}., \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

は共に浅い水の表面を一方向に伝わる長波長の波の運動を記述する方程式である．現在KdV方程式は，長波長の波を記述する代表的な方程式としてプラズマ物理などにも応用がある．ここでは(1)を一般化した一般化KdV方程式

$$\text{(gKdV)}\qquad \begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{for } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$f(u) = |u|^{p-1}u/p$ を扱うことにする．特に $p = 3$ の時は修正KdV方程式と呼ばれる完全可積分な方程式になる．

KdV方程式やRLW方程式の解の中で特に重要な役割を果たすのは，空間局在的で形状を保ったまま一定の速度で進行する孤立波と呼ばれる波である．φ_c を

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \varphi'' - c\varphi + f(\varphi) = 0, \\ \lim\limits_{y\to\pm\infty} \varphi(y) = 0, \end{cases}$$

の解とするとき，φ_c は

$$\text{(3)}\qquad \varphi_c(x) = (p(p+1)c/2)^{1/(p-1)} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}} \left((p-1)\sqrt{c}x/2\right)$$

という形で与えられる．このとき $u(t,x) = \varphi_c(x - ct + \gamma)$, とすると，$u(t,x)$ は(gKdV)方程式の解になる．この解のことを特に孤立波解という．

3 孤立波解の軌道安定性

(gKdV)は

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u_x(t,x)^2 - \frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right) dx \quad (\text{ハミルトニアン}),$$
$$N(u) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)^2 dx \quad (\text{モーメント}),$$

の2つの量を保存量にもつ．このため，エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R})$ の強位相では，解の漸近安定性は期待できない．従って，次のようにリャプノフ安定性を調べることになる．

Definition 1 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *s.t.* (gKdV)の初期値 u_0 が

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} |u_0 - \varphi_c(\cdot + y)|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta$$

であるとき，解 $u(t,x)$ は

$$\sup_{t\geq 0}\inf_{y\in\mathbb{R}} |u(t,\cdot)-\varphi_c(\cdot+y)|_{H^1(\mathbb{R})}<\varepsilon$$

をみたす．

また孤立波解が上の意味で（軌道）安定でないとき，その（軌道）不安定であるという．

Remark 1 上の定義で孤立波が安定であるということは，「同じ速度で進む孤立波解全体の集合は H^1-*norm* に属する小さな摂動に関して安定」であるという意味する．安定性をこのように定義する理由は，$c_1 \simeq c_2$ ならば $|\varphi_{c_1}-\varphi_{c_2}|_{H^1}\simeq 0$ であるが，十分時間が経つと

$$|\varphi_{c_1}(\cdot-c_1t)-\varphi_{c_2}(\cdot-c_2t)|_{H^1}\simeq|\varphi_{c_1}|_{H^1}$$

となるからである．

(gKdV) 方程式の孤立波解 φ_c は，拘束条件 $N(u)=N(\varphi_c)$ の下での，汎関数 $E(u)$ の臨界点になっている．

Cazenave-Lions [8], Berestycki-Cazenave [3], Grillakis-Shatah-Strauss [11] などの研究により，非線形シュレディンガー方程式の定常波解は，拘束条件 $N(u)=$ 定数 の下でエネルギー汎関数 $E(u)$ の極小点であれば安定であり，鞍点であれば不安定であることが知られていた．Weinstein [39] や Bona-Souganidis-Strauss [5] らはこの方法を一般化 KdV 方程式の研究に応用し，孤立波解は

- $\frac{d}{dc}N(\varphi_c)>0$ ならば安定，
- $\frac{d}{dc}N(\varphi_c)<0$ ならば不安定，

であることを示した．つまり (gKdV) の場合，$1<p<5$ ならば安定であり，$p>5$ ならば不安定になる ($p=5$ の場合が不安定であることは Martel-Merle [17] によって示された）．

以下に Weinstein による証明の概略を紹介する．$u_0=\varphi_{c_0}(x-\gamma_0)+v_0$ とし，正の数 c と $\gamma(t)$ $(t\geq 0)$ を $N(u)=N(\varphi_c)$,

$$\langle v(t),\partial_y\varphi_c\rangle=0,\quad v(t)=u(t,\cdot+\gamma(t))-\varphi_c \tag{4}$$

をみたすように選ぶ．ここで，$\langle u,v\rangle:=\int_{\mathbb{R}}uvdx$ とする．

$E(u)$, $N(u)$ は (gKdV) 方程式の保存量であり，

$$E(u(\cdot+\gamma)) = E(u(\cdot)), \quad N(u(\cdot+\gamma)) = N(u(\cdot)) \qquad (\forall u \in H^1(\mathbb{R}),\ \forall \gamma \in \mathbb{R})$$

という性質をもつ．従って φ_c が汎関数

$$S_c(u) = E(u) + \frac{c}{2}N(u)$$

の critical point であることに着目すると

$$\begin{aligned} \delta S := {} & S_c(u_0 + v) - S_c(u_0) \\ = {} & S_c(u(t, \cdot + \gamma(t)) - S_c(\varphi_c) \\ = {} & \langle D^2 S_c(\varphi_c) v(t), v(t)\rangle + O(|v(t)|^3_{H^1}) \end{aligned}$$

となる．

$p \in (1,5)$ の場合，$L_c := D^2 S_c(\varphi_c) = -\partial_y^2 + c - f'(\varphi_c)$ はある正の数 ν に対して

$$v \in H^1(\mathbb{R}) \text{ かつ } \langle v, \partial_y \varphi_c\rangle = \langle v, \varphi_c\rangle = 0 \Longrightarrow \langle L_c v, v\rangle \geq \nu |v|^2_{H^1}$$

となる．

$$\begin{aligned} & v_\parallel = \frac{1}{|\varphi_c|^2_{L^2}}\langle v, \varphi_c\rangle \varphi_c = -\frac{1}{2}|v|^2_{L^2}|\varphi_c|^2_{L^2}\varphi_c, \\ & v = v_\perp + v_\parallel, \end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{aligned} \langle Lv, v\rangle & = \langle L v_\perp, v_\perp\rangle + O(|v|^3_{H^1}) \\ & \geq \nu |v_\perp|^2_{H^1} + O(|v|^3_{H^1}) \\ & \geq \frac{\nu}{2}|v|^2_{H^1}. \end{aligned}$$

ところで仮定から $|\delta S|$ は十分小さな数であるから，

$$\exists\, C > 0 \text{ such that } \quad \sup_{t\geq 0} |v(t)|_{H^1} \leq C\sqrt{|\delta S|}$$

となる．従って孤立波解が安定であることが示された．

4 重み付き空間における孤立波の漸近安定性

ところで，(gKdV) 方程式の自明解のまわりでの線形化方程式

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{5}$$

に $e^{i(kx-\omega(k)t)}$ を代入すると，分散関係式

$$\omega(k) = -k^3$$

が得られる．従って孤立波と振動しながら減衰する分散波とでは進行方向が逆向きになる．また小さな孤立波は主要な孤立波に比べると進行速度が遅いので，主要な孤立波の周りだけを観察すると，孤立波解は漸近安定に見えることが予想される．この予想は（非可積分系の場合を含み）数値実験でも確かめられていた．

Pego-Weinstein [32, 33] は上に述べた (gKdV) の解の特性を利用して重み付き空間 $H_a^1 := \{v \,|\, |v|_{H_a^1} := |e^{ax}v|_{H^1(\mathbb{R})} < \infty\}$ における孤立波の漸近安定性を示した．

彼らの方法は以下のようなものである．(gKdV) の解 u を

$$u(t,x) = \varphi_{c(t)}(x - x(t)) + v(t, x - x(t)) \tag{6}$$

と主要な孤立波の部分と余りの部分にわける．ここで $x(t)$, $c(t)$ はそれぞれ主要な孤立波の中心と速度を表すパラメータである．$y = x - x(t)$ とおき，(6) を (gKdV) に代入すると

$$v_t + A_{c(t)}v + \{\dot{c}\partial_c + (c - \dot{x})\partial_y\}\varphi_{c(t)}(y) + \partial_y N(t,v), \tag{7}$$

$$A_{c(t)} := \partial_y L_{c(t)}, \qquad N(t,v) = f(\varphi_{c(t)} + v) - f(\varphi_{c(t)}) - f'(\varphi_{c(t)})v$$

を得る．(2) を 2 回微分すると

$$A_c\partial_y\varphi_c = 0, \quad A_c\partial_c\varphi_c = \partial_y\varphi_c \tag{8}$$

となるので，0 は孤立波解 $\varphi_{c(t)}$ の周りでの線形化作用素 A_c の固有値であることがわかる．

重み付き空間 $L_a^2 = \{v \,|\, e^{ay}v(y) \in L^2(\mathbb{R})\}$ $(a > 0)$ におけるスペクトルを考えることは，$\widetilde{A}_c = e^{ay}A_c e^{-ay}$ の L^2 におけるスペクトルを調べることに相当する．$\widetilde{A}_c$ のうち定係数の部分だけを取り出すと

$$-(\partial_y - a)^3 + c(\partial_y - a) = \{-\partial_y^3 + (c - 3a^2)\partial_y\} + 3a\partial_y^2 - a(c - a^2)$$

となるので，$a<\sqrt{c}$ とすると連続スペクトルはすべて，左半平面上に位置する．また (8) から，

$$\widetilde{A}_c\xi_1=0,\quad \widetilde{A}_c\xi_2=\xi_1,$$
$$\xi_1=e^{ay}\partial_y\varphi_c,\quad \xi_2=e^{ay}\partial_c\varphi_c,$$

となる．特に $p\in(1,5)$ つまり孤立波が安定である場合には Pego-Weinstein の研究 [32] により，例外的な場合を除き $\widetilde{A}_c$ の固有値は多重度 2 の固有値 0 のみであり，$\widetilde{A}_c$ のスペクトル $\sigma(\widetilde{A}_c)$ は適当な正の数 b に対して

$$\sigma(\widetilde{A}_c)\subset\{0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\lambda<-b\} \tag{9}$$

となることがわかった．

Remark 2 A_c の $L^2(\mathbb{R})$ におけるスペクトルは虚軸全体と一致する．

$\widetilde{A}_c^*$ の 0 固有値に属する広義固有関数 η_1, η_2 を $\langle\xi_i,\eta_j\rangle=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2)$ となるように定める．このとき，固有値 0 に属する $\widetilde{A}_c$ の固有空間への spectral projection P_c は

$$P_cu=\sum_{i=1,2}\langle u,\eta_i\rangle\xi_i$$

によって与えられる．

$Q_c=I-P_c$ とすると，(9) により A_c の生成する半群 $e^{t\widetilde{A}_c}$ は

$$\begin{aligned}&|e^{t\widetilde{A}_c}Q_cf|_{L^2}\le Ce^{-bt}|f|_{L^2},\\&|e^{t\widetilde{A}_c}Q_cf|_{H^1}\le Ct^{-\frac{1}{2}}e^{-bt}|f|_{L^2},\end{aligned} \tag{10}$$

という評価をみたす．$v(t)$ が $H^1_a(\mathbb{R})$ において評価式 (10) と同じオーダーで減衰するように，(6) において $w(t)=e^{ay}v(t)\in\mathrm{Range}\,Q_{c(t)}$ となるように分解する．すなわち

$$\langle w(t),\eta_1\rangle=\langle w(t),\eta_2\rangle=0 \tag{11}$$

となるようにパラメータ $x(t)$ と $c(t)$ を選ぶ．(11) を t で微分すると，

$$\begin{pmatrix}\dot{x}-c\\ \dot{c}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\langle\partial_yN,e^{ay}\eta_1\rangle\\ \langle\partial_yN,e^{ay}\eta_2\rangle\end{pmatrix}=O(|e^{-\sqrt{c(t)}y}v|_{L^2}^2) \tag{12}$$

を得る．

$|v(0)|_{H^1} + |v(0)|_{H^1_a}$ が十分小さいという仮定の下では，方程式 (7)–(12) の解 $v(t)$ は

$$|w(t)|_{H^1_a} \le Ce^{-bt}|w(0)|_{L^2_a} \tag{13}$$

という評価を得ることができる．(12) に (13) を代入すると，適当な $c_+ > 0$ と $\gamma_+ \in \mathbb{R}$ が存在して $t \to \infty$ で

$$c(t) \to c_+, \quad x(t) \to c_+t + \gamma_+$$

となることがわかる．

以上のような方針で Pego-Weinstein は孤立波解の漸近安定性を証明した．彼らは分散波と孤立波が時間とともに分離することを評価式 (10) で表している．この方法は，(RLW) 方程式のように分散波と孤立波が時間とともに分離する方程式には適用可能である (Miller-Weinstein [29])．また余り大きさの違わない（従ってほぼ等速で進む）互いに十分離れたパルスからなる解の挙動を解析するのにも有効である ([27])．

非線形シュレディンガー方程式の場合，分散波の動きは単一方向ではなく，(10) のような評価は期待できない．従って漸近安定性の解析はより難しくなり，Buslaev-Perelman[7] を始めとする一連の論文において，彼らの理論がどのような非線形項をもつ方程式に対して適用可能であるかは明確に示されていない．

5 RLW 方程式への Liouville 型定理の応用

本節では，Liouville 定理を用いた Martel-Merle による手法 ([17, 19]) の (RLW) 方程式への応用について述べる ([10], [28])．

Q_c を

$$\begin{cases} cQ'' - (c-1)Q + \dfrac{1}{2}Q^2 = 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \\ \displaystyle\lim_{|x|\to\infty} Q(x) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

の解とするとき，(RLW) 方程式のは孤立波解全体の集合は

$$\{Q_c(x - ct + \gamma) \mid c \in (1, \infty), \gamma \in \mathbb{R}\}$$

となる．(14) の解は平行移動をすれば一致するものを除けば一意で

$$Q_c(x) = 3(c-1)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}x\right)$$

と表される.

また (RLW) 方程式の保存量は

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + \frac{1}{3}u^3 \right) dx \quad (\text{ハミルトニアン}),$$

$$N(u) = \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 + u^2) dx \quad (\text{モーメント})$$

を保存量にもつ.

Q_c を (14) の解とすると $\frac{d}{dc}N(Q_c) > 0$ となり (RLW) の孤立波解はすべて安定である. (RLW) 方程式の自明解の周りでの線形化方程式は

$$(1 - \partial_x^2)\partial_t u + \partial_x u = 0,$$

であり, 分散関係式は $\omega(k) = \frac{k}{1+k^2}$ である. 従って群速度は

$$\omega'(k) = \frac{1-k^2}{(1+k^2)^2} < 1$$

であり, KdV 方程式の場合と同様に分散波は孤立波よりも進行速度が遅く, 時間が経てば孤立波とは分離することが期待される.

Miller-Weinstein [29] は前節に紹介した方法を用いることで重み付き空間 H_a^1 $(a > 0)$ における孤立波解がの漸近安定性を証明した.

以後 Martel-Merle の方法に従い, 孤立波や分散波が分離する様子を $H^1(\mathbb{R}_y)$-弱位相で (y は進行波座標系) で観察する.

Theorem 1 *Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ and let $u(t)$ be a solution to* (RLW) *on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ with $\alpha := \inf_{y\in\mathbb{R}} |u_0 - Q_{c_0}(\cdot + y)|_{H^1}$. Then there exist a $c_* > 1$ and an $\alpha_0 > 0$ satisfying the following:*

(i) *Suppose $c_0 \in (1, c_*)$ and $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Then, there exist a $c_+ > 1$ and a C^1-function $x(t)$ such that*

$$u(t, \cdot + x(t)) \rightharpoonup Q_{c_+} \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}),$$

and $x_t \to c_+$ as $t \to \infty$.

(ii) *The conclusion of* (i) *holds for the speed $c_0 \in [c_*, \infty)$, except for an exceptional set of values that have no finite accumulation point.*

Remark 3 *Theorem 1* の証明において,

(H3) 孤立波解の線形化作用素が 0 以外に固有値をもたない

ことを仮定した．Miller-Weinstein [29] は，この仮定が（上の定理に述べた意味で）ほとんどの場合成り立つことを示している．Martel-Merle の論文では，

$$\int_{\mathbb{R}} xu(t,x)^2 dx$$

という量を計算することで，(H3) に相当する仮定をせずに (gKdV) の孤立波解の漸近安定性を証明している．しかし (gKdV) と異なり (RLW) はモーメントが一回微分を含む保存量になっているため，彼らの論法を $H^1(\mathbb{R})$ のクラスでおこなうことは難しい．

(RLW) の解 $u(t,x)$ を次のように主要な孤立波と余りの部分に分解する．

$$u(t,x) = Q_{c(t)}(x - x(t)) + v(t,x), \tag{15}$$

$$(v(t,\cdot), (\partial_x^2 - 1)Q_{c(t)}) = (v(t,\cdot), \partial_x Q_{c(t)}) = 0. \tag{H1}$$

(RLW) に (15) を代入すると，

$$\begin{aligned}(1-\partial_x^2)v_t =& \partial_x L_{c(t)} v + \{(\dot{x} - c)\partial_x - \dot{c}\partial_c\}(1-\partial_x^2)Q_{c(t)} \\ &+ (\dot{x} - c)(1-\partial_x^2)v_x - v\partial_x v,\end{aligned} \tag{16}$$

を得る．

Pego-Weinstein では孤立波と分散波の進行速度が孤立波よりも遅いことを (10),(13) で表したが，以下の議論では Lemma 2 と Lemma 3 がその役割をはたす．

$$\psi(x) = \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-b|y|} dy,$$

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \sigma t)(u_x(t,x)^2 + u(t,x)^2) dx,$$

$$I_{x_0}(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \sigma t - x_0)\left(u_x(t,x)^2 + u(t,x)^2\right) dx$$

とする．I_{x_0} は点 x_0 よりも右の H^1-mass を測る量である．

Lemma 2 (Monotonicity lemma) *For any $\sigma > 1$ and $b \in (0, \frac{2(\sigma-1)}{\sigma+1})$, there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that if $|u_0|_{H^1} \le \varepsilon_0$, $I(t)$ is monotone decreasing in t.*

Remark 4 *Lemma 2* では H^1*-norm* が小さいことのみを仮定しているので，小さな孤立波は解に含まれることがある．孤立波は小さなものほど，進行速度が遅く 1 に近くなる．*Lemma 2* において $\sigma > 1$ に応じて $|u_0|_{H^1}$ が決まるのはこのためである．

Lemma 3 (Almost monotonicity) *Let $\sigma > 1$, $\delta > 0$ and $b \in (0, \frac{2(\sigma-1)}{\sigma+1})$. Let $x(t)$ and $c(t)$ be C^1-functions satisfying $\dot{x}(t) > (1+\delta)\sigma$ and $c(t) > \sigma$. Then there exists an $\varepsilon > 0$ such that if $\sup_{t\geq 0} |v(t)|_{H^1} \leq \varepsilon$,*

$$I_{x_0}(t) - I_{x_0}(0) \leq Ce^{bx_0} \quad \textit{for every } x_0 \leq 0 \textit{ and } t \geq 0,$$

where $C = C(\sigma, \delta, b, \varepsilon)$.

u を (RLW) の解，$y_0 > 0$ を十分大きな数とすると Lemma 3 から

$$J_L(t) = \int (1 - \psi(x - x(t) + y_0))(u_x(t,x)^2 + u(t,x)^2)dx,$$
$$J_R(t) = \int \psi(x - x(t) - y_0)(u_x(t,x)^2 + u(t,x)^2)dx,$$

は $\forall t' \in [0,t]$ に対して

$$J_L(t) \geq J_L(t') - A_1 e^{-by_0}, \qquad J_R(t) \leq J_R(t') + A_1 e^{-by_0} \tag{17}$$

をみたす．つまり孤立波の左側にある H^1-mass はほぼ非減少であり，孤立波の右側にある H^1-mass はほぼ非増大であることがわかる．

次の命題が孤立波の漸近安定性を $H^1(\mathbb{R})$ の弱位相で示すための鍵となる．

Proposition 4 (Liouville Theorem) *Let $\alpha_1 > 0$ be a sufficiently small number and let $c_* > 1$ be a positive number given in Theorem 1.*

(i) *Suppose that $v(t) \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0,\infty); H^1(\mathbb{R}))$ is a solution to* (16) *on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfying $|v(0)|_{H^1} \leq \alpha_1$,* (H1) *and the following assumption:*

(H2) *For all $\delta > 0$, there exists an $A > 0$ such that for any $t \in \mathbb{R}$,*
$$\int_{|x|>A} \left(\partial_x v(t,x)^2 + v(t,x)^2\right) dx \leq \delta.$$

Then $v \equiv 0$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(ii) *The conclusion of* (i) *holds for the speed $c_0 \in [c_*, \infty)$, except for an exceptional set of values that have no finite accumulation point.*

Remark 5 上の命題は,「孤立波解の近傍において H^1-*mass* が特定の場所に局在する解は孤立波解に限る」ということを主張している．

Theorem 1の証明

Proposition 4を認めて，Theorem 1を示す．証明は背理法による．孤立波解の安定性から，$\sup_{t\geq 0}|v(t)|_{H^1}\leq C|v_0|_{H^1}$ なので，Theorem 1の結論を否定すると $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$, $c(t_n)\to\tilde{c}_0$,

$$v(t_n,\cdot)\rightharpoonup\tilde{v}_0\not\equiv 0\quad\text{in } H^1(\mathbb{R})$$

をみたす数列 $\{t_n\}_{jn=1}^{\infty}$ が存在する．

$\tilde{u}_0=Q_{\tilde{c}_0}+\tilde{v}_0$ を初期値とする (RLW) の解を $\tilde{u}(t)$ とし，$\tilde{x}(t)$, $\tilde{c}(t)$, $\tilde{v}(t)$ は各時刻 t において条件 (H1) をみたすように $\tilde{u}(t)$ を分解したものとする．もし $\tilde{v}(t)$ が (H2) をみたせば，Proposition 4から $\tilde{v}(t)\equiv 0$ となり矛盾である．従って Theorem 1が示されたことになる．

$\tilde{v}(t)$ が (H2) をみたすことを背理法により示す．(H2) が成立しなければ，$\exists\delta>0$ such that $\forall y_0>0$ に対して

$$\int_{|y|\leq 2y_0}(\tilde{u}_x(t_0,x+\tilde{x}(t_0))^2+\tilde{u}(t_0,x+\tilde{x}(t_0))^2)dx\leq N(\tilde{u}(0))-\delta$$

をみたす $t_0\in\mathbb{R}$ が存在する．従って必要ならば，y_0 をさらに大きくとることで

$$\begin{aligned}&\int\{\psi(x-\tilde{x}(t_0)+y_0)-\psi(x-\tilde{x}(t_0)-y_0)\}(\tilde{u}_x(t_0,x)^2+\tilde{u}(t_0,x)^2)\\&\leq N(\tilde{u}(0))-\frac{9}{10}\delta,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\int\{\psi(x+y_0)-\psi(x-y_0)\}(\tilde{u}_x(t_0,x)^2+\tilde{u}(t_0,x)^2)\geq N(\tilde{u}(0))-\frac{1}{10}\delta\tag{19}$$

となる．元の解 $u(t)$ と $\tilde{u}(t)$ の間に次のような対応がつく．

Lemma 5 (Stability on weak convergence for local time) *Suppose that $u(t_n,\cdot+x(t_n))\rightharpoonup\tilde{u}_0$ in $H^1(\mathbb{R})$ as $n\to\infty$. Let $\tilde{u}(t,x)$ be a solution to* (RLW) *with $\tilde{u}(0)=\tilde{u}_0$. Then, as $n\to\infty$,*

$$\begin{aligned}&u(t_n+t,\cdot+x(t_n))\rightharpoonup\tilde{u}(t,\cdot)\quad\text{in } H^1(\mathbb{R})\text{ for every } t\in\mathbb{R},\\&u(\cdot+t_n,\cdot+x(t_n))\to\tilde{u}\quad\text{in } C([-t_1,t_1];L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))\text{ for every } t_1>0.\end{aligned}$$

また $v(t)=v_1(t)+v_2(t)$,

$$\begin{cases}(1-\partial_x^2)\partial_t v_1-\dot{x}(1-\partial_x^2)v_1+\partial_x\left(v_1+\dfrac{1}{2}v_1^2\right)=0,\\ v_1(0,x)=v_0(x).\end{cases}\tag{20}$$

とおき，(16) の解 $v(t)$ を小さな (RLW) の解に相当する部分 v_1 となめらかな部分 v_2 に分けると，v_1 は主要な孤立波よりも進行速度が遅く，十分時間が経てば孤立波の周りからは消え去る．一方で $v_2(t)$ は

$$\begin{cases} \partial_t v_2 - \dot{x}\partial_x v_2 + \partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}v_2 = \partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}g_1 + g_2, \\ v_2(0,x) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$g_1 = -v_2(v_1 + \frac{1}{2}v_2) - Q_c(v_1+v_2), \qquad g_2 = (\dot{x}-c)\partial_x Q - \dot{c}\partial_c Q.$$

をみたし，方程式の右辺の項にかかっている $(1-\partial_x^2)^{-1}$ のために

$$\sup_{t\geq 0} |e^{bx}v_2(t)|_{H^2} < \infty$$

となる．これらの性質から，

$$N(u(t_n+t_0)) - (J_L(t_n+t_0) + J_R(t_n+t_0)) \simeq (18) \text{ の左辺}$$
$$N(u(t_n)) - (J_L(t_n) + J_R(t_n)) \simeq (19) \text{ の左辺}$$

がわかる．従って

$$J_L(t_n+t_0) + J_R(t_n+t_0) \geq J_L(t_n) + J_R(t_n) + \frac{3}{5}\delta$$

となるが，t について J_L はほぼ非減少，J_R はほぼ非増大なので，$t_{n+1} - t_n \geq t_0$ となるように部分列を取り直せば，

$$J_L(t_{n+1}) - J_L(t_n) \geq \frac{2}{5}\delta \tag{22}$$

となる．(22) は $J_L(t) \leq N(u(t))$ の有界性に反し矛盾である．

Proposition 4 の証明の概略

証明は背理法による．どんな小さな α_1 をとってきても，Proposition 4 の結論が成り立たないとする．このとき (H1), (H2) と $\lim_{n\to\infty} |v_n(0)|_{H^1} = 0$ をみたす (16) の解の列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(i) $a_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} |v_n(t)|_{H^1}$, $b_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} |v_n(t)|_{L^2}$ とする．このとき，ある正の数 C_1, C_2, θ が存在し任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$b_n \le a_n \le C_1 b_n, \tag{23}$$

$$|v_n(t,x)| \le C_2 b_n e^{-\theta|x|} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{24}$$

となることを示す．

(ii) $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $|v_n(t_n)|_{L^2(\mathbb{R})} \ge \frac{1}{2} b_n$ をみたすようにとり，$w(t) = \frac{v(t+t_n)}{b_n}$ とすると，II) から

$$|w_n(0)|_{L^2} \ge \frac{1}{2}$$

であり，$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列を選べと

$$(w(t), (\partial_x^2 - 1)Q_{c_0}) = (w(t), \partial_x Q_{c_0}) = 0, \tag{h1}$$

$$|w(t,x)| \le Ce^{-\theta|x|} \quad \text{for every } (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{h2}$$

をみたす

$$(1-\partial_x^2)\partial_t w = \partial_x L_{c_0} w + \beta(t)(1-\partial_x^2)\partial_x Q_{c_0} \tag{25}$$

の非自明解 $w(t) \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}))$ に収束する．ここで

$$\beta(t) = \frac{1}{|\partial_x Q_{c_0}|_{L^2}^2}(w(t), L\partial_x^2(1-\partial_x^2)^{-1}Q_{c_0}).$$

(iii) 線形方程式 (25) に対する Liouville 型定理を線形化方程式の解の local energy decay を用いて証明する．

Proposition 6 *Let $w \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0,\infty); H^1(\mathbb{R}))$ be a solution to* (25) *satisfying* (h1) *and* (h2)*. Then, there exists a positive number $c_* > 1$ satisfying the following:*

(i) *If $c \in (1, c_*)$,*

$$w \equiv 0 \quad \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(ii) *The conclusion of* (i) *holds for the speed $c_0 \in [c_*, \infty)$, except for an exceptional set of values that have no finite accumulation point.*

Martel-Merle [17, 19] とは違い，証明には (RLW) の線形化方程式の local energy decay の評価を用いる．

Martel-Merle-Tsai[23] は，速度の大きいものから順に右から十分に離して複数のパルスを並べた gKdV 方程式の multi-pulse 解の漸近安定性を証明した．彼らの方法は (RLW) 方程式にも適用できるものと思われる．

参考文献

[1] M. J. ABLOWITZ AND H. SEGUR, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.

[2] T. B. BENJAMIN, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London A, 328 (1972), pp. 153–183.

[3] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans le équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. C. R. Acad. Sci. **293** (1981), 489–492.

[4] J. L. BONA, *On the stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 344 (1975), pp. 363–374.

[5] J. L. BONA, P. E. SOUGANIDIS AND W. A. STRAUSS, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. R. Soc. Lond., 411 (1987), pp. 395–412.

[6] J. L. BONA AND A. SOYEUR, *On the stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, J. Nonlinear Sci., 4 (1994), pp. 449–470.

[7] V. S. BUSLAEV AND G. S. PERELMAN, *Scattering for the nonlinear Schrödinger equation*: states close to a soliton, St. Petersburg Math. J., 4 (1993), pp. 1111–1142.

[8] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.

[9] P. DEIFT AND X. ZHOU, *A steepest descent method for oscillatory for Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation*, Annals of Math., 137 (1993), pp. 295–368.

[10] K. El Dika, Stabilité asymptotique des ondes solitaires de l'équation de Benjamin-Bona-Mahony, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, *to appear.*

[11] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry*, J. Funct Anal., 74 (1987), pp. 160–197.

[12] D. Henry *Geometric Theory of Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981.

[13] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Stud. in Appl. Math. Ser., 8 (1983), pp. 93–128.

[14] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 527–620.

[15] D.J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag., 539 (1895), pp. 422–443.

[16] J.H. Maddocks and R.L. Sachs, *On the stability of KdV multi-solitons*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 867–901.

[17] Y. Martel and F. Merle, *A Liouville Theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Pures Appl., 79 (2000), pp. 339–425.

[18] Y. Martel and F. Merle, *Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, Geom. Funct. Anal., 11 (2001), pp. 74–123.

[19] Y. Martel and F. Merle, *Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., 157 (2001), pp. 219–254.

[20] Y. Martel and F. Merle, *Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), pp. 617–664.

[21] Y. MARTEL AND F. MERLE, *Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation*, Ann. of Math. 155 (2002), 235–280.

[22] Y. MARTEL AND F. MERLE, *Nonexistence of blow-up solution with minimal L^2-mass for the critical gKdV equation*, Duke Math. J. 115 (2002), 385–408.

[23] Y. Martel, F. Merle and Tai-Peng Tsai, *Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations*, Comm. Math. Phys. 231 (2002), pp. 347–373.

[24] F. Merle and P. Raphael, *Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Geom. Funct. Anal., 13 (2003), 591–642.

[25] F. Merle and P. Raphael, *Blow-up dynamics and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, preprint.

[26] F. Merle and P. Raphael, *On universality of blow-up profile for L^2-critical nonlinear Schrödinger equation*, preprint.

[27] T. MIZUMACHI, *Weak interaction between solitary waves of the generalized KdV equations*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

[28] T. MIZUMACHI, *Asymptotic stability of solitary wave solutions to the regularized long wave equation*, preprint.

[29] J. Miller and M. Weinstein, Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long wave equation, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 399–441.

[30] G.S. PERELMAN, *Some results on the scattering of weakly interacting solitons for nonlinear Schrödinger equations, in Spectral theory, microlocal analysis, singular manifolds*, Math. Top., 14, Akademie Verlag, Berlin, 1997, pp. 78–137 .

[31] G.S. PERELMAN, *Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schroedinger eqations*, math-ph/0309021.

[32] R. L. PEGO AND M. I. WEINSTEIN, *Eigenvalues and instabilities of solitary waves*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A340 (1992), pp. 47–94.

[33] R. L. PEGO AND M. I. WEINSTEIN, *Asymptotic stability of solitary waves*, Comm. Math. Phys., 164 (1994), pp. 305–349.

[34] I. RODNIANSKI, W. SCHLAG AND A. SOFFER *Asymptotic stability of N-soliton states of NLS*, math.AP/0309114.

[35] P. C. SCHUUR, *Asymptotic Analysis of soliton problems*, Lecture Notes in Mathematics 1232, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986.

[36] A. SOFFER AND M. I. WEINSTEIN, *Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations*, Commun. Math. Phys., 133 (1990), pp. 119–146.

[37] A. SOFFER AND M. I. WEINSTEIN, *Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations II*: The case of anisotropic potentials and data, J. Diff. Eq., 98 (1992), pp. 376–390

[38] M.I. WEINSTEIN, *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), pp. 472–491.

[39] M.I. WEINSTEIN, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure. Appl. Math., 39 (1986), pp. 51–68.